УДК 519.865

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, А.В. Цитко

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@rambler.ru

На основе метода динамического программирования Беллмана приводится исследование задачи формирования портфеля ценных бумаг, как задачи оптимального управления капиталом портфеля в смысле минимизации функционала, характеризующего его отклонения от капитала эталонного портфеля.

1. Введение

На первом этапе теория финансов сводилась к подсчету простых и сложных процентов, и основной вопрос был связан с администрированием и увеличением фондов и капитала. Последующее развитие теории шло в предположении условий: 1) полной определенности [1]; 2) неопределенности [2]. В первом случае рассматривались вопросы оптимальных решений на финансовом рынке в условиях полной определенности (в вероятностном смысле), и с математической точки зрения задачи сводились к максимизации функций многих переменных при наличии ограничений. Во втором случае основной задачей являлась проблема инвестиционных решений участников финансового рынка в условиях неопределенности. Используемый математический аппарат «mean-variance analysis», основанный на теории вероятностей, выявил важную роль ковариаций в стоимостях рисковых активов, как показателя, от которого зависит степень риска портфеля ценных бумаг. Современный этап развития теории связан: 1) с описанием процесса изменения стоимости рисковых активов в виде случайного процесса [3]; 2) с формулировкой задачи формирования портфеля, как задачи оптимального управления стохастической системой [4].

В данной работе на основе математической теории оптимальных процессов с применением принципа динамического программирования Беллмана [5] рассматривается одна задача формирования портфеля ценных бумаг, допускающая точное аналитическое решение.

2. Постановка задачи

Пусть $S(t)$ – цена рискового актива (например, акции), которая определяется стохастическим дифференциальным уравнением [3]

$$dS(t)=aS(t)dt+\sigma S(t)dW(t),\quad S(t_0)=S_0,\quad t\geq t_0,\qquad (1)$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma>0$, $S_0>0$, а $B(t)$ – цена безрискового актива (например, банковский счет), которая определяется уравнением

$$dB(t)=rB(t)dt,\quad B(t_0)=B_0,\qquad (2)$$

где $r>0$, $B_0>0$ и решение которого имеет вид

$$B(t)=B_0e^{r(t-t_0)}.\qquad (3)$$

Капитал портфеля будем обозначать $X(t)$. В текущий момент времени t доля капитала $u(t)$ вкладывается в рисковый актив, а доля капитала $\tilde{u}(t)=1-u(t)$ вкладывается в безрисковый актив, то есть

$$S(t)=u(t)X(t),\quad B(t)=[1-u(t)]X(t).\qquad (4)$$

Из (4) следует

$$S(t)+B(t)=X(t).\qquad (5)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет капитал $X(t)$. Из (5) следует

$$dX(t)=dS(t)+dB(t).\qquad (6)$$

Используя (1), (2), (4) в (6) , получим

$$dX(t)=[r+(a-r)u(t)]X(t)dt+\sigma u(t)X(t)dW(t),\quad t\geq t_0,\quad X(t_0)=X_0.\qquad (7)$$

Введем стоимость эталонного портфеля $Y(t)$, которая определяется следующим дифференциальным уравнением

$$dY(t)=\mu Y(t)dt,\quad Y(t_0)=Y_0.\qquad (8)$$

Очевидно, что

$$Y(t)=Y_0e^{\mu(t-t_0)}.\qquad (9)$$

Ставится задача: таким образом распределять капитал $X(t)$ между рисковым $S(t)$ и безрисковым $B(t)$ активами, то есть таким образом сформировать управление $u(t)$, чтобы капитал портфеля $X(t)$ соответствовал (в каком-то смысле) стоимости эталонного портфеля $Y(t)$.

Формализуем задачу. Пусть $t\in[0,t_1]$, то есть $t_0=0$. В качестве меры расхождения в текущий момент времени t между капиталом $X(t)$ и стоимостью эталонного портфеля $Y(t)$ выберем величину $[X(t)-Y(t)]^2$, а в момент времени t_1 – величину $[X(t_1)-Y(t_1)]^2$. Таким образом, в качестве интегральной меры расхождения между портфелями может быть взят функционал

$$J=M\{[X(t_1)-Y(t_1)]^2+\int_0^{t_1}[X(t)-Y(t)]^2dt\,|X(t_0)=X_0\},\qquad (10)$$

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания. В результате пришли к следующей задаче *оптимального управления*: найти управление $u(t)$, чтобы на траекториях стохастического дифференциального уравнения (7) функционал (10) достигал минимума.

Замечание 1. Согласно (4), (5) для управления $u(t)$ должно выполняться ограничение

$$0 \le u(t) \le 1. \tag{11}$$

Поэтому, решение поставленной задачи может быть достигнуто: без учета (11), а полученное решение анализируется на предмет его выполнения; с учетом (11); без учета (11). В последней ситуации: а) если $u(t)<0$, то считается, что рисковый актив берется в долг; б) если $u(t)>0$, то $\tilde{u}(t)=1-u(t)<0$, и в долг берется безрисковый актив. Таким образом, первый и третий пути решения аналогичны, но в третьем случае не проводится анализ на предмет выполнения условия (11).

Замечание 2. Смысловое содержание параметров a, σ, r и μ, которыми определяется постановка задачи, заключается в следующем. Параметры r и μ являются параметрами роста соответственно стоимостей безрискового актива и эталонного портфеля, т.е. являются банковскими процентами по соответствующим активам. По смысловому содержанию $r>0$ и $\mu>0$. Параметр σ является параметром волатильности и характеризует степень хаотичности изменения цены рискового актива. По смысловому содержанию $\sigma>0$. Параметр a является параметром изменчивости и характеризует тенденцию изменения цены рискового актива в среднем. По смысловому содержанию $a \lesseqgtr 0$. При $a=0$ цена рискового актива S_t будучи случайной, в среднем изменяется возле начального значения S_0, при $a>0$ в среднем возрастает, а при $a<0$ – в среднем убывает. С точки зрения теории случайных процессов S_t ведет себя соответственно как мартингал, как субмартингал, как супермартингал [6].

3. Исследование капитала при произвольном управлении

Пусть

$$\tilde{X}(t) = \ln\{X(t)\}. \tag{12}$$

Тогда, используя формулу стохастического дифференцирования Ито [6], получаем с учетом (7), что

$$d\tilde{X}(t) = \frac{1}{X(t)}dX(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)}\sigma^2 u^2(t)X^2(t)dt =$$
$$= [r + (a-r)u(t)]dt + \sigma u(t)dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2(t)dt.$$

Таким образом, $\tilde{X}(t)$ определяется уравнением

$$d\tilde{X}(t) = [r + (a-r)u(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2(t)]dt + \sigma u(t)dW(t). \tag{13}$$

Отсюда

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_0 + \int_0^t [r + (a-r)u(\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2(\tau)]d\tau +$$
$$+\sigma\int_0^t u(\tau)dW(\tau) = \tilde{X}_0 + rt +$$
$$+\int_0^t u(\tau)[(a-r) - \frac{1}{2}\sigma^2 u(\tau)]d\tau + \sigma\int_0^t u(\tau)dW(\tau). \tag{14}$$

Так как $X(t)=\exp\{\tilde{X}(t)\}$, то из (14) следует, что капитал $X(t)$ портфеля определяется формулой

$$X(t) = X_0 \exp\{rt\}\exp\{\int_0^t u(\tau)[(a-r) -$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2 u(\tau)]d\tau + \sigma\int_0^t u(\tau)dW(\tau)\}. \tag{15}$$

Из (15) получаем, что

$$X(t) > 0. \tag{16}$$

Таким образом, получили, что при любом управлении, то есть при произвольном перераспределении капитала между рисковым и безрисковым активами, капитал остается положительным. Данное свойство свидетельствует о корректности математической модели.

4. Решение задачи

Поставленная задача решается без учета ограничения (11).

Утверждение 1. Функция Беллмана $U(t,X)$ для поставленной задачи оптимального управления имеет представление

$$U(t,X) = b_0(t) + b_1(t)X + \frac{1}{2}b_2(t)X^2, \tag{17}$$

где $b_0(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ определяются дифференциальными уравнениями (точка сверху означает производную по t)

$$\dot{b}_0(t) = \frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} - Y^2(t), \tag{18}$$

$$\dot{b}_1(t) = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}b_1(t) - rb_1(t) + 2Y(t), \tag{19}$$

$$\dot{b}_2(t) = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2}b_2(t) - 2rb_2(t) - 2 \tag{20}$$

с граничными условиями

$$b_0(t_1) = Y^2(t_1), \quad b_1(t_1) = -2Y(t_1), \quad b_2(t_1) = 2. \tag{21}$$

Доказательство. По определению [5] согласно (10)

$$U(t,X) = \min_u M\{[X(t_1) - Y(t_1)]^2 +$$
$$+\int_t^{t_1}[X(\tau) - Y(\tau)]^2 d\tau \,|\, X(t) = X\}. \tag{22}$$

Тогда, согласно (7), (10), уравнение Беллмана имеет вид [5]

$$\min_u\left\{\frac{\partial U(t,X)}{\partial t} + [r + (a-r)u]X\frac{\partial U(t,X)}{\partial X} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}u^2\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U(t,X)}{\partial X^2} + [X - Y(t)]^2\right\} = 0 \tag{23}$$

с граничным условием

$$U(t_1, X) = [X - Y(t_1)]^2. \tag{24}$$

Необходимое условие минимума $\frac{\partial}{\partial u}\{\cdot\} = 0$ в (23) приводит к уравнению

$$(a-r)X\frac{\partial U(t,X)}{X}+\sigma^2X^2\frac{\partial^2U(t,X)}{\partial X^2}u=0.$$

Отсюда получаем выражение для оптимального управления через функцию Беллмана в виде

$$u^0(t)=-\frac{(a-r)\dfrac{\partial U(t,X)}{\partial X}}{\sigma^2X\dfrac{\partial^2U(t,X)}{\partial X^2}}. \qquad (25)$$

Подстановка (25) в (23) приводит к уравнению для функции Беллмана в частных производных вида

$$\frac{\partial U(t,X)}{\partial t}+rX\frac{\partial U(t,X)}{\partial X}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{\left(\dfrac{\partial U(t,X)}{\partial X}\right)^2}{\dfrac{\partial^2U(t,X)}{\partial X^2}}+$$
$$+X^2-2Y(t)X+Y^2(t)=0. \qquad (26)$$

Граничное условие следует из (24)

$$U(t,X)\big|_{t=t_1}=X^2-2Y(t_1)X+Y^2(t_1). \qquad (27)$$

Согласно методу разделения переменных [7] решение ищем в виде (17). Тогда

$$\frac{\partial U(t,X)}{\partial t}=\dot b_0(t)+\dot b_1(t)+\frac{1}{2}\dot b_2(t)X^2,$$
$$\frac{\partial U(t,X)}{\partial X}=b_1(t)+b_2(t)X,$$
$$\frac{\partial^2U(t,X)}{\partial X^2}=b_2(t). \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (26), получим

$$\dot b_0(t)+\dot b_1(t)X+\frac{1}{2}\dot b_2(t)X^2+rb_1(t)X+rb_2(t)X^2-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1^2(t)+b_2^2(t)X^2+2b_1(t)b_2(t)X}{b_2(t)}+$$
$$+X^2-2Y(t)X+Y^2(t)=0. \qquad (29)$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\dot b_0(t)-\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}\frac{b_1^2(t)}{b_2(t)}+Y^2(t)+$$
$$+\dot b_1(t)X+rb_1(t)X-\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}b_1(t)X-2Y(t)X+$$
$$+\frac{1}{2}\dot b_2(t)X^2+rb_2(t)X^2-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}b_2(t)X^2+X^2=0. \qquad (30)$$

В соответствии с методом разделения переменных, приравнивая в (30) коэффициенты при одинаковых степенях X, приходим к уравнениям (18–20). Граничные уравнения (21) следуют из (17), (27).

Утверждение 2. Решения уравнений (18–20) с граничными условиями (21) имеют вид

$$b_1(t)=[b_1^1e^{(\mu-\beta)t}-b_1^2]e^{\beta t}, \qquad (31)$$

$$b_2(t)=b_2^1e^{-(r-\beta)t}-b_2^2, \qquad (32)$$

$$b_0(t)=X_0^2e^{2\mu t_1}+\frac{X_0^2}{2\mu}(e^{2\mu t_1}-e^{2\mu t})+$$
$$+\frac{X_0^2}{2}\frac{(r+\beta)\sqrt{r-\beta}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{r-\beta}}}\times$$
$$\times\left(\frac{e^{-\frac{(r+\beta)}{2}t_1}}{\mu(\mu-\beta)}-\frac{2\left(1+\dfrac{1}{\mu-\beta}\right)}{\mu^2-\beta^2}e^{\left(\mu-\frac{r+\beta}{2}\right)t_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1+\dfrac{1}{\mu+\beta}\right)^2}{\beta}e^{\left(2\mu-\frac{r+3\beta}{2}\right)t_1}\right)\times$$
$$\times\ln\left|\frac{\left(\sqrt{d}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}\right)\left(\sqrt{d}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}\right)}{\left(\sqrt{d}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}\right)\left(\sqrt{d}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}\right)}\right|, \qquad (33)$$

где

$$\beta=\frac{(a-r)^2}{\sigma^2}-r, \qquad (34)$$

$$b_1^1=\frac{2X_0}{\mu-\beta},\quad b_1^2=2X_0\left(1+\frac{1}{\mu-\beta}\right)e^{(\mu-\beta)t_1}, \qquad (35)$$

$$b_2^1=2\left(1+\frac{1}{r-\beta}\right)e^{(r-\beta)t_1},\quad b_2^2=\frac{2}{r-\beta}, \qquad (36)$$

$$d=b_2^2/b_2^1. \qquad (37)$$

Доказательство. **Решение ур. (19).** Полагая $Y_0=X_0$, $t_0=0$, из (9) следует

$$Y(t)=X_0e^{\mu t},\quad Y(t_1)=X_0e^{\mu t_1}. \qquad (38)$$

Используя обозначение (34), получаем из (19), (21), (38)

$$\dot b_1(t)=\beta b_1(t)+2X_0e^{\mu t},\quad b_1(t_1)=-2X_0e^{\mu t_1}. \qquad (39)$$

Общее решение однородного уравнения $\dot b_1(t)=\beta b_1(t)$ имеет вид

$$b_1(t)=c(t)e^{\beta t}. \qquad (40)$$

Подставляя (40) в (39), получаем уравнение для нахождения $c(t)$ в виде $\dot c(t)=2X_0e^{(\mu-\beta)t}$, общее решение которого имеет вид

$$c(t)=\frac{2X_0}{(\mu-\beta)}e^{(\mu-\beta)t}+c_1. \qquad (41)$$

Подставляя (41) в (40), получаем общее решение уравнения (39)

$$b_1(t) = \frac{2X_0}{(\mu-\beta)} e^{\mu t} + c_1 e^{\beta t}. \qquad (42)$$

Константа c_1 находится из (42) и из граничного условия (39) с учетом (42)

$$\frac{2X_0}{(\mu-\beta)} e^{\mu t_1} + c_1 e^{\beta t_1} = -2X_0 e^{\mu t_1}.$$

Отсюда

$$c_1 = -2\left(1 + \frac{1}{\mu-\beta}\right) X_0 e^{(\mu-\beta)t_1}.$$

Тогда, согласно (42),

$$b_1(t) = \frac{2X_0}{\mu-\beta} e^{\mu t} - 2X_0\left(1 + \frac{1}{\mu-\beta}\right) e^{(\mu-\beta)t_1} e^{\beta t}.$$

В итоге с использованием обозначений (35) получаем (31).

Решение ур. (20). Из (20), (21) с учетом (34) следует

$$\dot{b}_2(t) = (\beta - r) b_2(t) - 2, \quad b_2(t_1) = 2. \qquad (43)$$

Общее решение однородного уравнения $\dot{b}_2(t)=(\beta-r)b_2(t)$ имеет вид

$$b_2(t) = c(t) e^{(\beta-r)t}. \qquad (44)$$

Подставляя (44) в (43) получим уравнение для нахождения $c(t)$ в виде $\dot{c}(t)=-2e^{-(\beta-r)t}$, общее решение которого имеет вид

$$c(t) = \frac{2}{\beta-r} e^{-(\beta-r)t} + c_1. \qquad (45)$$

Подставляя (45) в (44), получаем общее решение уравнения (43)

$$b_2(t) = \frac{2}{\beta-r} + c_1 e^{(\beta-r)t}. \qquad (46)$$

Константа c_1 находится из граничного условия (43) с учетом (46)

$$\frac{2}{\beta-r} + c_1 e^{(\beta-r)t_1} = 2.$$

Отсюда

$$c_1 = 2\left(1 - \frac{1}{\beta-r}\right) e^{-(\beta-r)t_1}.$$

Тогда, согласно (46),

$$b_2(t) = \frac{2}{\beta-r} + 2\left(1 - \frac{1}{\beta-r}\right) e^{-(\beta-r)t_1} e^{(\beta-r)t}. \qquad (47)$$

Перепишем (47) следующим образом

$$b_2(t) = 2\left(1 + \frac{1}{r-\beta}\right) e^{(r-\beta)t_1} e^{-(r-\beta)t} - \frac{2}{r-\beta}. \qquad (48)$$

Из (48), используя обозначения (36), получаем (32).

Решение ур. (18). Из (18), (21), (38) с учетом (31), (32), (34) последовательно получаем:

$$\dot{b}_0(t) = \frac{1}{2}(\beta + r)\frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} - X_0^2 e^{2\mu t}, \quad b_0(t_1) = X_0^2 e^{2\mu t_1};$$

$$b_0(t) = \frac{1}{2}(\beta + r)\int \frac{b_1^2(t)}{b_2(t)} dt - X_0^2 \int e^{2\mu t} dt + C;$$

$$b_0(t) =$$

$$= \frac{1}{2}(\beta + r)\left\{\int \frac{(b_1^1)^2 e^{2\mu t} - 2b_1^1 b_1^2 e^{(\mu+\beta)t} + (b_1^2)^2 e^{2\beta t}}{b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2} dt\right\} -$$

$$- \frac{X_0^2}{2\mu} e^{2\mu t} = \frac{1}{2}(\beta + r)\{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3\} - \frac{X_0^2}{2\mu} e^{2\mu t}, \qquad (49)$$

$$\gamma_1 = \int \frac{(b_1^1)^2 e^{2\mu t}}{b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2} dt, \quad \gamma_2 = -\int \frac{2b_1^1 b_1^2 e^{(\mu+\beta)t}}{b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2} dt, \qquad (50)$$

$$\gamma_3 = \int \frac{(b_1^2)^2 e^{2\beta t}}{b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2} dt.$$

Тогда, из (50) с учетом обозначения (37), получаем

$$\gamma_1 = \frac{X_0^2 \sqrt{r-\beta}\, e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}}{\mu(\mu-\beta)\sqrt{1 + \frac{1}{r-\beta}}} \ln\left|\frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right|, \qquad (51)$$

$$\gamma_2 = -\frac{2X_0^2\left(1 + \frac{1}{\mu-\beta}\right)\sqrt{r-\beta}\, e^{-\left(\mu - \frac{r+\beta}{2}\right)t_1}}{(\mu^2 - \beta^2)\sqrt{1 + \frac{1}{r-\beta}}} \times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right|, \qquad (52)$$

$$\gamma_3 = \frac{X_0^2\left(1 + \frac{1}{\mu-\beta}\right)^2 \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{r-\beta}\right)} e^{\left(2\mu - \frac{r+3\beta}{2}\right)t_1}}{\beta\left(1 + \frac{1}{r-\beta}\right)^2 e^{(r-\beta)t_1}\sqrt{2}} \times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sqrt{d} + e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}{\sqrt{d} - e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t}}\right|. \qquad (53)$$

Подстановка (51–53) в (49) приводит к (33), где

$$C = X_0^2 e^{2\mu t_1} + \frac{X_0^2}{2\mu} e^{2\mu t_1} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{X_0^2(r+\beta)\sqrt{r-\beta}}{\sqrt{1+\frac{1}{r-\beta}}} \ln\left|\frac{\sqrt{d}+e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}}{\sqrt{d}-e^{-\frac{(r-\beta)}{2}t_1}}\right| \times$$

$$\times\left(\frac{e^{\frac{-(r-\beta)}{2}t_1}}{\mu(\mu-\beta)} - \frac{2\left(1+\frac{1}{\mu-\beta}\right)}{\mu^2-\beta^2} e^{\left(\mu-\frac{r+\beta}{2}\right)t_1} + \frac{\left(1-\frac{1}{\mu-\beta}\right)^2}{\beta} e^{\left(2\mu-\frac{r+3\beta}{2}\right)t_1}\right).$$

Теорема. Оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующее ему оптимальное значение критерия качества J^0 определяются формулами

$$u^0(t) = -\frac{(a-r)[b_1(t)+b_2(t)X(t)]}{\sigma^2 b_2(t)X(t)}, \qquad (54)$$

$$J^{\circ} = b_0(0) + b_1(0)X_0 + \frac{1}{2}b_2(0)X_0^2, \qquad (55)$$

где $b_1(t)$, $b_2(t)$ определены в Утверждении 2, а $b_0(0)$, $b_1(0)$, $b_2(0)$ имеют вид

$$b_0(0) = X_0^2 e^{2\mu t_1} + \frac{X_0^2}{2\mu}(e^{2\mu t_1}-1) + \frac{X_0^2}{2}\frac{(r+\beta)\sqrt{r-\beta}}{\sqrt{1+\frac{1}{r-\beta}}} \times$$

$$\times\left(\frac{e^{-\frac{r-\beta}{2}t_1}}{\mu(\mu-\beta)} - \frac{2\left(1+\frac{1}{\mu-\beta}\right)}{\mu^2-\beta^2}e^{\left(\mu-\frac{r+\beta}{2}\right)t_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(1+\frac{1}{\mu+\beta}\right)^2}{\beta} e^{\left(2\mu-\frac{r+3\beta}{2}\right)t_1} \right) \ln\left|\frac{(\sqrt{d}+1)\left(\sqrt{d} - e^{-\frac{r-\beta}{2}t_1}\right)}{(\sqrt{d}-1)\left(\sqrt{d}+e^{-\frac{r-\beta}{2}t_1}\right)}\right|. \qquad (56)$$

$$b_1(0) = \frac{2X_0}{\mu-\beta} - 2X_0\left(1+\frac{1}{\mu-\beta}\right)e^{(\mu-\beta)t_1},$$

$$b_2(0) = 2\left(1+\frac{1}{r-\beta}\right)e^{(r-\beta)t_1} - \frac{2}{r-\beta}.$$

Доказательство. Использование (28) в (25) дает (54). Так как, по определению $J^0=U(0,X_0)$, то (55) следует из (17), а (56) из (31–33).

В заключение рассмотрим вопрос о выполнении достаточного условия минимума $\frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial u^2} > 0$ в (23), которое сводится к условию

$$\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 U(t,X)}{\partial X^2} > 0.$$

Тогда, согласно (16), (28), достаточное условие минимума определяется положительной определенностью функции $b_2(t)$, т.е.

$$b_2(t) > 0.$$

Из (32), (36) следует

$$b_2(t) = 2\left[\left(1+\frac{1}{r-\beta}\right)e^{(r-\beta)(t_1-t)} - \frac{1}{r-\beta}\right].$$

Тогда условие $b_2(t)>0$ сводится к условию

$$\left[\left(1+\frac{1}{r-\beta}\right)e^{(r-\beta)(t_1-t)} - \frac{1}{r-\beta}\right] > 0,$$

или к эквивалентному ему условию

$$\left(\frac{1+(r-\beta)}{r-\beta}\right)e^{(r-\beta)(t_1-t)} > \frac{1}{r-\beta}.$$

Если $r>\beta$, то $(r-\beta)(t_1-t)\geq 0$ и тогда $[1+(r-\beta)]e^{(r-\beta)(t_1-t)}>1$. Таким образом, при $r>\beta$ условие $b_2(t)>0$ выполняется.

5. Заключение

1. Задача формирования портфеля ценных бумаг, состоящего из рискового и безрискового активов, сформулирована как задача оптимального управления стохастической системой (7) с критерием качества (10).
2. На основе метода динамического программирования с использованием уравнения Беллмана (23) найдено оптимальное управление (54) и значение критерия (55), достигаемое при оптимальном управлении.
3. Предварительный анализ решения показывает, что структура управления, т.е. перераспределение капитала между рисковыми и безрисковыми активами (см. Замечание 1), и значение критерия качества, определяющее качество отслеживания капиталом портфеля капитала эталонного портфеля, зависят от соотношений между параметрами постановки задачи (см. Замечание 2). Этим исследованиям с экономической интерпретацией результатов и графическими иллюстрациями будет посвящена следующая работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Modigliani F., Miller M. The cost of capital, corporation finance, and theory of investment // American Economic Review. – 1958. – № 6. – P. 261–297.
2. Markowitz H. Mean-Variance analysis in portfolio choice and capital markets. – Cambridge, Massachusetts: Blackwell, 1990. – 387 p.
3. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industrial Management Review. – 1965. – № 6. – P. 13–31.
4. Merton R. Continuous-time finance. – Cambridge, Oxford: Blackwell, 1990. – 732 p.
5. Ройтенберг Я.И. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 551 с.
6. Гихман И.И, Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.